

## بررسی تمرکز و همگرایی لیزر هارمونیک دوم چرخ واگن با استفاده از روش اجزای محدود گلرکین

### خلاصه

**مقدمه:** این تحقیق به منظور بررسی تمرکز و همگرایی لیزر هارمونیک دوم فیبر چرخ واگن سه‌حفره‌ای با هسته لیتیوم تالیوم اکسید ( $\text{LiTaO}_3$ ) با استفاده از روش اجزای محدود صورت گرفته است. این ماده تقارن مرکزی ندارد و توانایی ایجاد هارمونیک دوم را دارد.

**روش بررسی:** هنگامی که نور ورودی با طول موج  $0.866$  میکرومتر وارد فیبر می‌شود، به دلیل نوع ساختار فیبر و نیز به دلیل ماده ایجادکننده هارمونیک دوم در هسته فیبر، شدت قله موج فرودی در اثر انتشار در این محیط غیر خطی افزایش می‌یابد و هارمونیک‌های بالاتر به‌ویژه هارمونیک دوم را ایجاد می‌کند. معادله حاکم بر فیبر، معادله ویژه مقادیر غیر خطی است که برای حل ویژه مقادیر آن از روش عددی اجزای محدود که بسیار دقیق است استفاده شده است.

**یافته‌ها:** براساس معادلات موج، ویژه مقادیر مربوط به هارمونیک اول و دوم محاسبه شده و نمایش دو و سه‌بعدی همگرایی میدان‌های الکتریکی هم‌بسته با ویژه مقدار هارمونیک دوم مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین تحول و رشد این مدها و نیز توان خروجی برای ۴ شدت انتخابی در مسیر Z از طول فیبر محاسبه شده است. توان بالایی حدود ۴۰۰ وات نیز برای این فیبر حاصل شده است.

**نتیجه‌گیری:** باتوجه به مش‌بندی دقیق و انعطاف‌پذیر بودن روش اجزای محدود در شرایط مرزی، این روش از بین دیگر روش‌های شبیه‌سازی موجود (FDTD, FDFD و ...) انتخاب شده است. توان بالا و تراکم و همگرایی شدید توزیع میدان الکتریکی ناشی از این فیبر قابل ملاحظه بوده است. به دلیل تمرکز و همگرایی بالای موج خروجی، پیشنهاد می‌شود که از این فیبر در ایجاد لیزرهای هارمونیک دوم جهت کاربرد در جراحی به‌عنوان ابزاری در تیغه جراحی و از بین بردن تومورها به دلیل ایجاد حرارت زیاد استفاده شود. محدودیت این روش در کنترل حرارت ایجادشده می‌باشد و بایستی طوری اعمال شود که به سلول‌های سالم آسیبی وارد نشود.

**واژه‌های کلیدی:** فیبر چرخ واگن، لیزر هارمونیک دوم، روش اجزای محدود

مطهره السادات حسینیان<sup>۱</sup>

علیرضا احمدی<sup>۲</sup>

محمد آقابوری‌زاده<sup>۳</sup>

۱. دانشجوی دکتری، گروه فیزیک و فوتونیک، دانشکده علوم و تکنولوژی پیشرفته دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته کرمان، کرمان، ایران

۲. دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران

۳. استاد گروه فیزیک و فوتونیک، دانشکده علوم و تکنولوژی پیشرفته، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته کرمان، کرمان، ایران

## مقدمه

افزایش می‌یابد که این دقت حل مسئله را بالا می‌برد [۱۰ و ۱۱]. در مرحله اول مجموعه ویژه مقادیرهای  $\beta_1$  (هارمونیک اول) و  $\beta_2$  (هارمونیک دوم) با حل معادله ویژه مقادیری به دست می‌آیند. مسئله ویژه مقادیری در صفحه X-Y حل می‌شود و مقدار تمرکز مدهای هارمونیک دوم در سطح مقطع عرضی فیبر نشان داده خواهد شد. در مرحله بعد، از هر کدام از این دو مجموعه یک مد از مجموعه تهبگنی مدهای اصلی را برای انتشار در طول فیبر انتخاب می‌کنیم سپس به محاسبه ویژه بردارها که همان توزیع میدان الکتریکی می‌باشد، خواهیم پرداخت. در انتها، نمودار انتشار این دو مد را برحسب طول فیبر رسم خواهیم نمود و به بررسی رشد هارمونیک دوم و بستگی آن به تغییرات شدت اولیه موج فرودی خواهیم پرداخت.

## محاسبات ریاضی و شبیه‌سازی

## ۱- حل معادله ویژه مقادیری

به منظور مطالعه اثرات هارمونیک دوم لازم است عبارات غیر خطی را در جمله جابه‌جایی الکتریکی معادله ماکسول (D) در نظر بگیریم که معادله ساده شده نهایی به صورت:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_0 \epsilon \vec{E} + \epsilon_0 \vec{p}^{NL}) = 0 \quad (1)$$

است [۱۲ و ۱۳].  $\epsilon_0$ ،  $\mu_0$  و  $[\epsilon]$  به ترتیب پذیرندگی‌های الکتریکی، مغناطیسی و تانسور پذیرندگی الکتریکی خطی هستند [۱۴ و ۱۵]. بردار میدان الکتریکی که در آن  $(i=1)$  مربوط به هارمونیک اول و  $(i=2)$  مربوط به هارمونیک دوم است به صورت:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \vec{E}_i(x, y) e^{j(\omega_i t - \beta_i z)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \begin{Bmatrix} e_{ui} \\ e_{vi} \\ e_{wi} \end{Bmatrix} e^{j(\omega_i t - \beta_i z)} \quad (2)$$

نوشته می‌شود که در آن  $e_{ui}$ ،  $e_{vi}$ ،  $e_{wi}$  مؤلفه‌های میدان الکتریکی به ترتیب در طول محورهای X و Z، Y می‌باشند. همچنین قطبش غیر خطی  $\vec{p}^{NL}$  به صورت:

$$\vec{p}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \begin{Bmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \\ p_{zi} \end{Bmatrix} e^{j(-1)^i \Delta \beta z} e^{j(\omega_i t - \beta_i z)} \quad (3)$$

تعریف می‌شود که در آن  $p_{xi}$ ،  $p_{yi}$  و  $p_{zi}$  مؤلفه‌های قطبش غیر خطی مرتبه دوم هستند [۱۵].  $\Delta \beta$  عدم تطبیق فاز بین امواج هارمونیک اول و دوم است که به صورت  $\Delta \beta = \beta_2 - 2\beta_1$  می‌باشد. عبارت نهایی از معادله موج با جایگزینی معادله ۲ و ۳ درون ۱ جهت حذف مدهای اضافی به صورت:

$$(\nabla \times \vec{E}_i, \nabla \times \vec{E}_i^*) + (\nabla \cdot \vec{E}_i, \nabla \cdot \vec{E}_i^*) - k_{0i}^2 \epsilon (\vec{E}_i, \vec{E}_i^*) - k_{0i}^2 (\vec{p}^{NL}, \vec{E}_i^*) = 0. \quad (4)$$

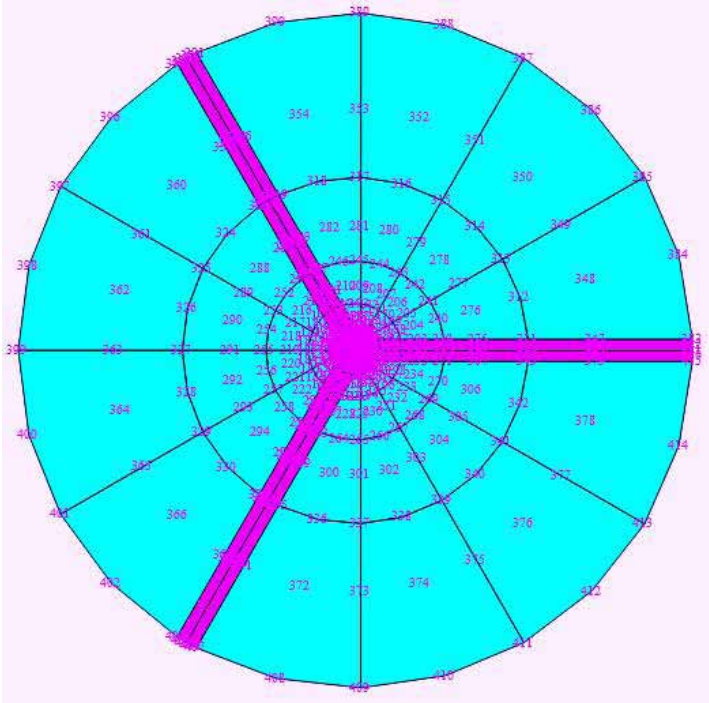
در جراحی لیزری، از لیزر به عنوان چاقویی بسیار ظریف و حساس استفاده می‌شود. استفاده از لیزر به عنوان چاقوی جراحی به بیش از ۴ دهه می‌رسد. در این روش میزان خونریزی، آلودگی و عفونت بسیار کم است و سرعت بهبود زخم بسیار زیاد می‌شود. علاوه بر این، جراحی با دقت و سرعت بالاتری صورت می‌گیرد. واکنش‌های تخریبی که اساس کار لیزرهای پرتوان هستند و با توان بالای ۵/۰ وات و افزایش انرژی جنبشی در بافت در نتیجه ایجاد اثر حرارتی که حتی به حد ۸۰۰ درجه سانتی‌گراد نیز ممکن است برسد، باعث دناتوراسیون پروتئین‌ها، انعقاد، تبخیر، کربنیزاسیون و برش می‌شوند. این لیزرها در جراحی کاربرد دارند و به لیزرهای داغ نیز معروف هستند [۱]. برای ایجاد چنین لیزرهایی تمرکز و توان بالا مورد نیاز است. یکی از روش‌هایی که منجر به تمرکز و همگرایی شدید نور لیزر می‌گردد، تولید هارمونیک دوم می‌باشد که یکی از مهم‌ترین فرآیندهای نوری غیر خطی است به نحوی که در آن نور با فرکانس  $\omega$  به یک محیط غیر خطی برخورد می‌نماید و نوری با فرکانس  $2\omega$  ایجاد می‌کند [۲].

از جمله فیبرهایی که در تولید هارمونیک دوم مورد توجه قرار گرفتند، فیبرهای میکروساختار هستند. ساختارهای جدید و ویژگی‌های هدایت‌کنندگی خوب این نوع فیبرها منجر به مطالعات غیر خطی از جمله تولید هارمونیک دوم، جمع فرکانسی و اختلاف فرکانسی و... در فیبرهای نوری می‌شود. فیبرهای میکروساختار شیشه/هوا به‌طور گسترده در ابزارهای نوری غیر خطی از ۴۰ سال پیش تاکنون مورد استفاده قرار گرفته است [۳]. بعدها فیبرهایی با ساختارهای متفاوت ایجاد شده‌اند که با عنوان فیبر گاف نوری فوتونیک شناخته می‌شوند. اساس هدایت‌کنندگی نور در آن‌ها گاف نوری در غلاف می‌باشد. این فیبرها شامل یک هسته می‌باشند که توسط آرایه‌هایی از حفره‌های هوا در غلاف احاطه شده‌اند [۴].

در این مقاله از فیبر چرخ واگن سه حفره‌ای استفاده شده است که بازوهای آن به هسته متصل است (شکل ۱). شعاع هسته، غلاف و ضخامت بازوها به ترتیب ۲/۵ و ۴۲ و ۲/۳۶ میکرومتر است [۷-۵]. نوع ساختار این فیبر به گونه‌ای است که قابلیت تمرکز و گیراندازی نور را در هسته و بازوها از طریق گاف نوری و انعکاس داخلی ایجاد می‌کند و از آنجاکه ما در صدد ایجاد لیزر هارمونیک دوم هستیم، لازم است ماده‌ای را انتخاب نماییم که قابلیت و شرایط ایجاد هارمونیک دوم را داشته باشد. مشخصه بسیار مهم دیگر در ایجاد لیزر هارمونیک دوم، همگرایی و شدت مدهای ایجاد شده در این فیبر است که تحت بررسی قرار خواهد گرفت.

برای محاسبات شبیه‌سازی این نوع لیزر از معادله ماکسول غیر خطی استفاده می‌کنیم و از روش حل عددی اجزای محدود (گلرکین) بهره خواهیم گرفت [۸ و ۹]. مرتبه تقریب توابع (درون یابی) از طریق p-version

$$\text{است که در آن } \{\phi_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \text{ می‌باشد [۱۹].}$$



شکل ۱: مش بندی سطح مقطعی از فیبر چرخ واگن در ابعاد واقعی

با تعریف تابع درون‌یابی در جهت Z معادله نهایی به صورت:

$$(۱۴)$$

$$G(\Phi) = - \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} M^T [S_1] \frac{d}{dz} M & [0] \\ [0] & \frac{d}{dz} M^T [S_2] \frac{d}{dz} M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M^T [Q_1] \frac{d}{dz} M & [0] \\ [0] & M^T [Q_2] \frac{d}{dz} M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -M^T \alpha k_1 \Psi^T dL_1 \\ -M^T \gamma k_2 \Psi^T dL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Y] & [0] \\ [0] & [Y] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & [0] \\ [0] & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

تبدیل می‌شود که با در نظر گرفتن تغییرات همگرایی  $|\Delta\Phi| < 10^{-6}$  با روش نیوتن - رفسون حل خواهد شد:

$$(۱۸)$$

$$\{0\} = G(\Phi) = G|_{(\Phi=\Phi_0)} + \delta_{\Phi} G|_{(\Phi=\Phi_0)} \Delta\Phi + \dots$$

$$J(\Phi_0) = \delta_{\Phi} G|_{(\Phi=\Phi_0)} \rightarrow -G|_{(\Phi=\Phi_0)} = J(\Phi_0) \Delta\Phi.$$

شرح جزئیات بیشتر در مرجع [۱۹] آورده شده است.

به دست می‌آید [۱۳]. روش اجزای محدود، روش محاسباتی بسیار دقیقی است که برای حل شرایط مرزی بسیار عالی عمل می‌کند. در معادله ۴، عبارت  $\hat{E}_i^*$  تغییرات  $\hat{E}_i$  برحسب  $eu$ ،  $ev$ ،  $ew$  می‌باشد [۱۷ و ۱۸] که به صورت:

$$e_u = \sum_k^{n_u} \xi_k(x, y) u_k(z) \quad (۵)$$

$$e_v = \sum_k^{n_v} \eta_k(x, y) v_k(z) \quad (۶)$$

$$e_w = \sum_k^{n_w} \psi_k(x, y) w_k(z) \quad (۷)$$

است که در آن  $n_u$ ،  $n_v$ ،  $n_w$  ابعاد فضاهای درون‌یابی  $u$ ،  $v$ ،  $w$  می‌باشد. بردارهای  $\xi$ ،  $\eta$  و  $\psi$  درون‌یابی دو بُعدی هستند. بنابراین میدان الکتریکی نیز به صورت:

$$(۸)$$

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \hat{E} e^{j(\omega t - \beta z)} = \begin{Bmatrix} e_{ul} \\ e_{vl} \\ e_{wl} \end{Bmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)}$$

است. با محاسبه تمام عبارات معادله ۴ و بدون در نظر گیری عبارات غیر خطی و مشتقات بر حسب Z به معادله:

$$(\beta_i^2 [A_i] + j \beta_i [B_i] + [C_i]) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} e^{2j(\omega t - \beta_i z)} = 0 \quad (۹)$$

$$i = 1, 2$$

می‌رسیم که مجهول این مسئله،  $\beta_i$  هستند. در این فیبر از  $\text{LiTaO}_3$  به عنوان ماده هسته استفاده شده است. این ماده تقارن مرکزی ندارد و توانایی ایجاد هارمونیک دوم را دارد [۱۴]. طول موج ورودی  $\lambda_0 = 0.866$  میکرومتر است.

نمونه‌ای از مش بندی فیبر چرخ واگن در شکل ۱ نشان داده شده است که در آن از عناصر چهار ضلعی و مثلثی p-version در مش استفاده شده است.

### ۲- حل معادله انتشار

با استفاده از  $\hat{\beta}_i$  محاسبه شده در معادله ۹ و بازنویسی معادله ۴، معادله انتشار ۱۰ را تشکیل می‌دهیم که در آن عبارت غیر خطی  $\bar{p}^{NL}$  و عبارات مربوط به مشتقات Z را در نظر می‌گیریم:

$$(\nabla \times \nabla \times \vec{E}_i - \vec{E}_i^*) - k_{0i}^2 (\bar{p}^{NL}, \vec{E}_i^*) = 0. \quad (۱۰)$$

فرم گلرکین معادله ۱۰ به صورت:

$$(۱۱)$$

$$([S_i] \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{\phi_i\} + [Q_i] \frac{\partial}{\partial z} \{\phi_i\} - k_{0i}^2 (\bar{p}^{NL}, \vec{E}_i^*)) = 0, \text{ For } i = 1, 2$$

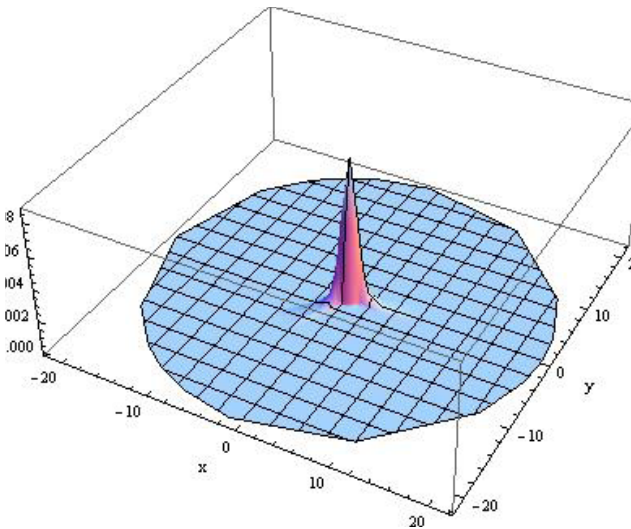
### یافته‌ها

با در نظر گرفتن فرکانس‌های  $\omega_1$  و  $\omega_2$  به عنوان ورودی مسئله، مقادیر مجهول  $\beta_1$  و  $\beta_2$  را به عنوان ویژه مقدار محاسبه می‌کنیم. سپس ویژه تابع‌های متناظر با آن‌ها را می‌یابیم. نتایج جدول ۱ برای ۴ ویژه مقدار  $\beta_1$  و  $\beta_2$  به دست آمده است.

جدول ۱: ویژه مقدارهای  $\beta_1$  و  $\beta_2$  برای ۴ مد تبهگن

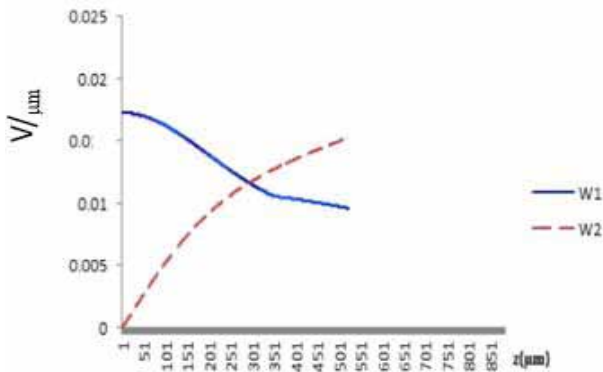
شماره مد	1-2	3-5	6-7	8-10
$\beta_2$	32.718	32.667	32.655	32.655
$\beta_1$	15.544	15.515	15.449	15.420
$\Delta\beta$	1.63	1.63	1.75	1.81

مقدار  $\Phi_0$  همان مقدار  $u, v$  و  $w$  در  $z = 0$  می‌باشد.



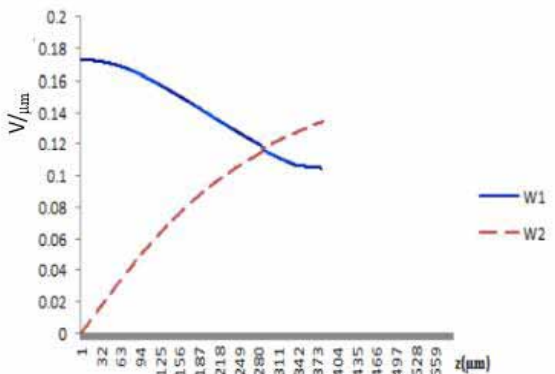
شکل ۳: توزیع سه بُعدی جهت نمایش همگرایی میدان‌های الکتریکی همبسته با ویژه مقدار هارمونیک دوم  $\beta_2=32.718$ . محور  $z$  مقادیر نسبی دامنه میدان الکتریکی را نشان می‌دهد.

همان طور که دیده می‌شود مقدار عدم انطباق فاز  $\Delta\beta$  با افزایش شماره مدها افزایش یافته است. توزیع میدان‌های درون صفحه‌ای اولین ویژه مقدار حقیقی هارمونیک دوم (مد هارمونیک دوم) نیز در شکل ۲ نشان داده شده است.



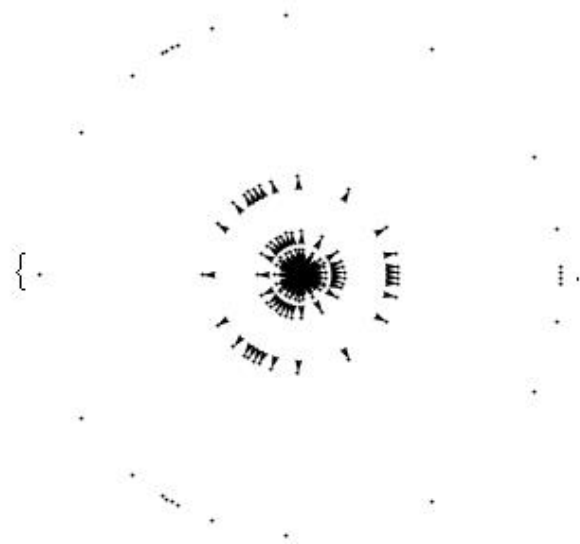
شکل ۴: انتشار ماکزیم دامنه میدان هارمونیک اول و دوم با شدت  $\Phi_0$

با توجه به دامنه میدان در شکل ۴ که حدود  $0.02V/\mu m$  است، توان این لیزر در حدود ۴۰۰ وات تخمین زده شده است.



شکل ۵: انتشار ماکزیم دامنه میدان هارمونیک اول و دوم با شدت  $10\Phi_0$

چنانکه در شکل ۲ و ۳ دیده می‌شود، تمرکز و همگرایی بیشتر مدهای هارمونیک دوم در هسته می‌باشد و این مزیتی بسیار خوب برای یک لیزر پرتوان به حساب می‌آید. در نمودار شکل‌های ۴ تا ۷ انتشار دامنه میدان هارمونیک اول ( $w_1$ ) مربوط به  $\beta_1 = 15.544$  و میدان هارمونیک دوم ( $w_2$ ) مربوط به  $\beta_2 = 32.718$  در مسیر  $z$  به ترتیب برای شدت اولیه  $\Phi_0, 10\Phi_0, 100\Phi_0$  و شدت  $1000\Phi_0$  نشان داده شده است.



شکل ۲: نمایش تمرکز توزیع میدان الکتریکی درون صفحه‌ای همبسته با ویژه مقدار هارمونیک دوم  $\beta_2=32.718$





## References:

1. Costela A, Duarte F.J. Medical applications of dye lasers, in *Tunable Laser Applications*. 2nd Ed. CRC, New York, 2009.
2. Eisenthal K.B. Equilibrium and Dynamic Processes at Interfaces by 2nd Harmonic and Sum Frequency Generation. *Annual Review of Physical Chemistry* 1992; 43: 627-61.
3. Kaiser P, Astle H.W. Low-loss single-material fibers made from pure fused silica. *The Bell System Technical Journal* 1974; 53: 1021-39.
4. Cregan R.F, Mangan B.J. Single-mode photonic band gap guidance of light in air. *Science* 1999; 285: 1537-9.
5. Afshar S.V, Ruan Y. Enhanced fluorescence sensing using microstructured optical fibers: a comparison of forward and backward collection modes. *Opt. Lett.* 2008; 33: 1473-5.
6. Warren-Smith S.C, Afshar S.V, Monro T.M. Theoretical study of liquid-immersed exposed-core microstructured optical fibers for sensing. *Opt. Express* 2008; 16: 9034-45.
7. Ruan Y, Foo T.C. Antibody immobilization within glass microstructured fibers: a route to sensitive and selective biosensors. *Opt. Express* 2008; 16: 18514-23.
8. Zhu Y, Bise R.T. Fabrication and characterization of solid-core photonic crystal fiber for strong evanescent field overlap. *Opt. Commun.* 2008; 281: 55-60.
9. Zhu Y, Du H. Design of solid-core micro structured optical fiber with steering wheel air cladding for optimal evanescent- field sensing. *Opt. Express*, 2006; 14: 3541-6.
10. Adjerid S, Aiffa M. Hierarchical finite element bases for triangular and tetrahedral elements. *Computer. Meth. Appl. Mech*, 2001; 190: 2925-41.
11. Konrad A. Triangular finite elements for vector fields in electro-magnetics. PhD Thesis, Department of Electrical Engineering, McGill University, 1974.
12. Agrawal G.P. *Nonlinear fiber optics*. 2nd Ed. Academic Press, Inc., 1995.
13. Koshiha M. *Optical waveguide theory by the finite element method*. KTK Scientific Publishers, Tokyo, 1992.
14. Yasui T, Koshiha M. Three-dimensional vector beam-propagation method for second harmonic generation analysis. *J. Lightwave Technol.*, 2001; 19: 780-5.
15. Boyd R.W. *Nonlinear optics*. Academic Press, 2003.
16. Jiang B-n, Povineli L.A. The origin of spurious solutions in computational electromagnetics. *J. Comp. Phys*, 1996; 125: 1597-630.
17. Reddy J.N. *An introduction to the finite element method*. 3rd Ed, McGraw-Hill, New York, 1984.
18. Jin J. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. 2nd Ed, Wiley- IEEE Press, New York, 2002.
19. Hoseinian M.S. "Title", Master's Thesis, Physics and Photonics Department, Keraman Graduate University of Technology, Kerman, Iran, 1390.